INÉGALITÉS

I- Définitions

Définition

Une **inégalité** est une affirmation fondée sur l'un des signes suivants : $<$; $\leq$; $>$; $\geq$.
Les deux expressions placées de part et d'autre d'un tel signe se nomment les **membres** de l'inégalité.

Remarque

« $a \neq b$ », qui se lit « a (est) différent de b » et qui est équivalent à « non($a = b$) » n'est pas une inégalité.
Rappelons que, si A est une affirmation, « **non** A » est la façon mathématique d'affirmer que « A **n'**est **pas** vraie ».

Inégalités strictes

$a < b$ se lit « a (est) strictement inférieur à b »

Le signe « $<$ » n'est pas défini, mais axiomatisé. Le but sera de poser des axiomes qui obligent « $a < b$ » à signifier que <u>a est placé avant b sur l'axe des réels</u>. Et d'ailleurs, nous le lirons parfois « … est avant … ».
Les autres signes ($<$; $\geq$; $\leq$) seront définis à partir de $<$.

Exemples : $1 < 1{,}5$ est vrai
$-1000 < 0{,}01$ est vrai
$-1 < -2$ est faux.

$a > b$ se lit « a (est) strictement supérieur à b » (et nous le lirons parfois « a est après b »).
$a > b \iff b < a$.

Inégalités larges

$a \leq b$ se lit « a (est) inférieur (ou égal) à b ».
$a \leq b \iff (a < b)$ ou $(a = b)$

Exemple : $1 \leq 2$ est vrai
$2 \leq 2$ est vrai.

$a \geq b$ se lit « a (est) supérieur (ou égal) à b ».
$a \geq b \iff (a > b)$ ou $(a = b)$

Encadrement

$a < x < b$ est une façon de condenser : $\begin{cases} a < x \\ x < b \end{cases}$

Et on peut le lire : « x est strictement compris entre a et b.
Rappel : l'accolade signifie tout simplement « et », comme dans un système d'équations.

II- Axiomes

Axiomes propres à l'ordre strict en général :

Rappelons que « $a < b$ », dans ce cours, sera parfois lu « a est avant b » au lieu de « a est strictement inférieur à b ». Cette lecture a deux avantages : la concision (un mot au lieu de trois, deux syllabes au lieu de 6) et la justesse intuitive : l'inégalité parle en effet d'ordre plus que de comparaison.

Transitivité

Si machin est avant bidule et que bidule est avant smurf, alors machin est avant smurf. Plus rigoureusement :

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \; ; \quad \begin{cases} a<b \\ b<c \end{cases} \Rightarrow \quad a<c$$

Rappels :

- $\forall a \in \mathbb{R}$ se lit « quel que soit a appartenant à $\mathbb{R}$ ».
- Nous nous autorisons à écrire « $\forall a,b \in \mathbb{R}$; … » pour condenser l'écriture : « $\forall a \in \mathbb{R}$; $\forall b \in \mathbb{R}$; … »
- Le signe $\Rightarrow$ se lit « **implique** ». Il a le sens d'un « si … alors … ».

Irréflexivité

Un nombre n'est pas avant à lui-même :

$\forall a \in \mathbb{R}$; non($a<a$)

Corollaire : antisymétrie

Un réel ne peut pas être à la fois avant et après un autre. Autrement dit :

$\forall a,b \in \mathbb{R}$; ($a<b$) $\Rightarrow$ non($b<a$)

Démonstration

Si l'on avait à la fois $a<b$ et $b<a$, alors, par transitivité, on aurait : $a<a$, ce que l'irréflexivité interdit.

Cas de l'ordre large

La lecture de ce qui suit est hautement facultative.

Une relation qui vérifie la transitivité et l'irréflexivité est dite une relation d'*ordre strict*. Les livres ont tendance à réserver le terme de relation d'ordre tout court aux relations d'ordre large, qu'on peut soit définir à partir des relations d'ordre strict (à la façon : $\forall a,b \in \mathbb{R}$; $a \leq b$ ssi $a<b$ ou $a=b$) soit « axiomatiser » à part. Dans cette optique, une relation d'ordre (donc d'ordre large, si par bonheur vous avez suivi) est une relation « réflexive, antisymétrique et transitive ». La réflexivité impose simplement que tout élément soit inférieur ou égal à lui-même et l'antisymétrie de la relation d'ordre large interdit à un nombre d'être à la fois inférieur et supérieur à un autre, à moins que les deux nombres ne soient égaux. L'inclusion est une relation d'ordre sur les ensembles, la divisibilité en est une sur les entiers.

Ordre total

L'ordre est dit *total* lorsque deux éléments peuvent toujours être comparés : si un nombre n'est pas strictement inférieur à un autre, alors il lui est supérieur :

$\forall a,b \in \mathbb{R}$; ($a < b$) ou ($b < a$) ou ($a = b$)

Axiomes propres aux réels :

Remarque préalable

La grande différence entre les inégalités et l'égalité, c'est que **celle-ci** est à la base des axiomes mathématiques (elle peut être un signe originel ou être définie à partir de l'appartenance à un ensemble qui serait elle-même originelle) et peut donc concerner tous les objets mathématiques, alors que **celles-là** sont liées à l'ensemble des réels.

Compatibilité avec l'addition

On ne change pas le sens d'une inégalité lorsqu'on ajoute un même nombre à ses membres :

$\forall a, b, \alpha \in \mathbb{R}$; $a<b \;\; \Rightarrow \;\; a+\alpha<b+\alpha$

« Compatibilité avec le signe d'un nombre »

Les nombres positif sont aussi ceux qui sont supérieurs à zéro :

$\forall x \in \mathbb{R}$; ($x \geq 0$) $\Leftrightarrow$ (x est positif)

En conséquence, « … ≥ 0 » peut se lire « … est positif », à la place de « … est supérieur à zéro ». Le fait de remplacer « supérieur à zéro » par « positif », aura, en plus de l'avantage de la concision (un mot contre trois) celui d'aider à comprendre la résolution des inéquations de degré 2 ou plus.

Commentaire

La lecture de ce qui suit est facultative, voire déconseillée.

En général, l'axiome énoncé par les cours de l'enseignement supérieur est celui de la *compatibilité avec la multiplication* :

$\forall x,y \in \mathbb{R}$; $x \geq 0$ et $y \geq 0$ $\Rightarrow$ $xy \geq 0$.

(Alors qu'ici, ce serait un corollaire de l'axiome de compatibilité avec le signe.)

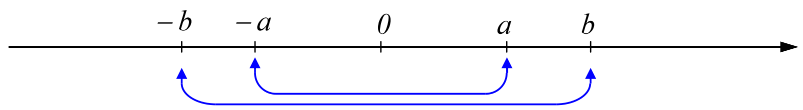
On définirait ensuite les nombres *positifs* comme étant ceux qui sont supérieurs à 0 et les négatifs comme ceux qui sont inférieurs à 0. Cela est possible dans des cours qui prétendent faire table rase de ce qui a été vu à l'école et s'offrent de tout reprendre depuis le début. Seulement, depuis la classe de quatrième, on a défini les nombres positifs comme ceux qui « s'écrivent avec un signe + » et les négatifs ceux qui « s'écrivent avec un signe – ». Puis on a fabriqué la multiplication des relatifs en décrétant la « règle des signes ». On a voulu ici respecter autant que faire se pouvait cet ordre « pédagogique ».

Corollaire

Les nombres négatifs sont aussi ceux qui sont inférieurs à zéro.

III- Règles élémentaires de transformation des inégalités

Pour transformer une inégalité, on procède un peu comme pour transformer une égalité. Il faut toutefois faire attention au cas où l'on prend l'opposé des deux membres, car alors, leur ordre est inversé :



Or, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un nombre strictement négatif, on prend subrepticement l'opposé. Ainsi, multiplier un nombre par –2 revient à le multiplier par 2 et à prendre l'opposé.

Théorème

Pour *transformer* une inégalité, on peut ajouter un même nombre à ses deux membres ou multiplier ses deux membres par un même nombre strictement positif. On peut aussi prendre l'opposé des deux membres, ou multiplier les deux membres par un même nombre strictement négatif, mais alors il faut changer le sens de l'inégalité. Autrement dit :

$\forall A,B,\alpha \in \mathbb{R}$; $A < B \Leftrightarrow A+\alpha < B+\alpha$

$A < B \Leftrightarrow -A > -B$

Si $\alpha > 0$: $A < B \Leftrightarrow \alpha A < \alpha B$

Si $\alpha < 0$: $A < B \Leftrightarrow \alpha A > \alpha B$

Rappels

α se lit « alpha ». C'est la première lettre de l'alphabet grec. (et β, qui se lit « bêta » est la deuxième lettre de l'alphabet grec).

Transformer une affirmation, c'est la remplacer par une autre qui lui soit *équivalente*.

Démonstration

Soient A, B et α trois réels.

- Cas de la somme :

$A < B \Rightarrow A+\alpha < B+\alpha$, par l'axiome de compatibilité avec l'addition. Réciproquement, si $A+\alpha < B+\alpha$, on peut ajouter $-\alpha$ aux deux membres par la règle qui précède, ce qui redonne $A < B$.

- Cas de l'opposé :

$A < B \Leftrightarrow A - A < B - A$	On ajoute $-A$ au deux membres en appliquant la règle qu'on vient de démontrer.
$\Leftrightarrow 0 < B - A$	
$\Leftrightarrow 0 - B < B - A - B$	On ajoute $-B$ aux deux membres.
$\Leftrightarrow - B < - A$	
$\Leftrightarrow - A > - B$	Par définition de >.

- Cas du produit :

  - Si $\alpha>0$:

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A < B$.
Alors, en ajoutant $-A$ aux deux membres, on a : $0 < B - A$.
Par l'axiome de compatibilité avec le signe d'un nombre, $B - A$ et α sont strictement positifs. Donc, par la règle des signes de la multiplication des relatifs, leur produit l'est aussi. Ce qui donne (en appliquant à nouveau la compatibilité avec les signes) :
$0<\alpha\,(B - A)$. Donc $0 <\alpha B - \alpha A$. Donc, en ajoutant αA aux deux membre : $\alpha A < \alpha B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Réciproquement, supposons que $\alpha A < \alpha B$.
Alors, par l'implication que nous venons de démontrer, on peut multiplier les deux membres par $\frac{1}{\alpha}$ (qui est strictement positif), ce qui donne l'inégalité qu'il fallait démontrer : $A < B$.

  - Si $\alpha<0$:

Alors $-\alpha$ est strictement positif, donc, en appliquant le cas précédemment démontré :
$A < B \Leftrightarrow -\alpha A < -\alpha B$
On applique ensuite la règle concernant l'opposé, ce qui donne : $A < B \Leftrightarrow \alpha A > \alpha B$.

Remarques

- On peut bien entendu soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité (sans changer son sens), dans la mesure ou soustraire, c'est ajouter l'opposé.
- On peut diviser par un même nombre non nul (et dont on connaît le signe) les deux membres d'une inégalité. Le sens de l'inégalité change si le diviseur en question est strictement négatif. Il suffit pour le prouver d'appliquer la règle de transformation concernant le produit en considérant que diviser revient à multiplier par l'inverse.
- En revanche, on ne peut pas prendre l'inverse des deux membres d'une inégalité, ni lui appliquer le produit en croix sans prendre d'importantes précautions.
- Si l'on remplace toutes les inégalités strictes du théorème par des inégalités larges (sauf les inégalités « $\alpha>0$ » et « $\alpha<0$ »), alors le théorème reste vrai.

IV- Inéquations

Définitions

> Une **inéquation** est une inégalité contenant une variable. Cette variable est alors parfois appelée l'*inconnue* de l'inéquation.
> Une **solution** d'une inéquation est une valeur de la variable qui rend l'inégalité vraie.
> **Résoudre** une inéquation, c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Intérêt

En terme d'intérêt **intrinsèque**, on peut se demander ce que les inéquations apportent de nouveau par rapport aux équations. Des difficultés, certes, mais peut-être pas grand-chose qui soit intellectuellement stimulant. Malheureusement, la question n'est pas de savoir si on les aime ou non : elles seront indispensables en première lorsqu'il s'agira d'étudier le « sens de variation » d'une fonction en étudiant à la place le signe de sa « fonction dérivée ». Il est donc nécessaire de parfaitement maîtriser la résolution des inéquations avant la fin de la seconde. Comme souvent lorsque se présente une notion un peu « technique », l'effort pour se l'approprier est moins important qu'on ne pourrait le craindre, d'autant qu'on le fait une fois pour toutes. C'est un peu comme pour un origami.

Méthodes de résolution

La méthode de résolution d'une inéquation ressemble à celle des équations. Pour commencer, elle dépend du *degré* de cette inéquation :

- Si l'inéquation est de degré 1, on applique les règles de transformations élémentaires de façon à isoler l'inconnue. Mais ce faisant, il faut prêter attention aux cas où l'inégalité change de sens. L'ensemble des solutions est alors un intervalle. Prenons l'inéquation $-3x+6<2x-5$. On peut la résoudre, par exemple, en faisant passer les « x » à gauche et les « uns » à droite (on appelle les constantes $+6$ et -5 « les uns », en imaginant qu'on fait apparaître l'unité : $+6uns$ et $-5uns$). $\quad -3x+6<2x-5$

$\Leftrightarrow \quad -5x+6<-5$

$\Leftrightarrow \quad -5x<-11$

$\Leftrightarrow \quad x>\dfrac{11}{5}$ Là, on change le sens de l'inégalité car on a divisé les deux membres par -5, qui est un nombre strictement négatif

L'inégalité est vraie lorsque la valeur de x est après $\dfrac{11}{5}$.

L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $\boxed{\left]\dfrac{11}{5};+\infty\right[}$

- Si l'inéquation est de degré 2 (ou plus), on fait tout passer du même côté et l'on factorise au maximum. C'est ensuite que les choses se compliquent un peu. En effet, pour conclure, avec les équation, on utilisait le théorème disant qu'un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Seulement, il n'existe pas de théorème similaire chez les inégalités :

  $AB=0 \Leftrightarrow (\ A=0$ ou $B=0\ )$

  Mais $\boxed{AB>0 \text{ n'est pas équivalent à : } A>0 \text{ ou } B>0}$

  En effet, un produit de deux facteurs est strictement positif lorsque les deux facteurs sont strictement positifs ou encore lorsqu'ils sont tous les deux strictement négatifs (cela vient tout simplement de la règle des signes du produit de deux relatifs) :

  $$AB>0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \right)$$

  (Pour bien entendre ce qui est écrit, « machin>0 » doit être lu « machin est strictement positif ». Et bien entendu, « machin<0 » doit se lire « machin est strictement négatif ».)

  Et si l'on a affaire à un produit de trois termes, le nombre de cas est doublé : un produit de trois facteurs est positif si et seulement si deux facteurs et deux seulement sont positifs (trois cas) ou si les facteurs sont tous positifs (encore un cas). Heureusement, dans le cas des inéquations, les facteurs dépendent tous d'une même variable, ce qui fait qu'il y aura moins de cas à considérer qu'on ne pouvait le craindre. L'étude du signe d'un produit de facteurs qui dépendent tous d'une même variable est facile à présenter dans un tableau de signes.

Le tableau de signes

Par exemple, si l'on veut résoudre l'inéquation : $(2x+6)(1-x)>0$, on peut établir le tableau suivant :

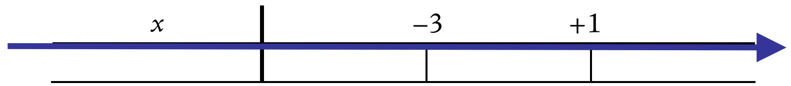
x		-3		$+1$	
$2x+6$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(2x+6)(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

La dernière ligne du tableau indique dans quel cas l'inéquation est vérifiée et l'on peut conclure que l'ensemble des solutions est l'intervalle $]-3;+1[$. Vous croyez avoir compris ? C'est peut-être le cas, mais méfiez-vous. Vous savez que vous n'avez rien compris ? Tant mieux. Car pour comprendre, il ne suffit pas de contempler un cas particulier et d'essayer d'en **induire** le cas général. Cette façon de procéder est fatale, en mathématiques. Elle est le meilleur moyen de se faire des illusions jusqu'à ce que le mécanisme tenant lieu d'une compréhension authentique soit mis en pièces par le grain de sable d'une subtile variation des données. C'est au professeur de fournir toutes les explications nécessaires et à l'élève de les écouter – et non de les deviner. Or, à l'oral, un moment d'inattention peut suffire à faire manquer une information essentielle. C'est pourquoi nous allons nous efforcer de tout écrire, quelle que soit la place que cela pourra prendre.

Précisons pour commencer que le mot « signes » dans « tableau de *signes* » fait référence au signe d'un nombre relatif. Il y a deux signes possibles : *plus* (marque des nombres *positifs*) et *moins* (marque des nombres *négatifs*). Les signes *plus* et *moins* inscrits dans les cases du tableau signifient « est positif » ou « est négatif ».

La première ligne du tableau de signes concerne la variable dont tout dépend (le x). On peut voir le trait horizontal séparant la première de la deuxième ligne comme étant l'axe des réels. Sur

cet axe, les valeurs représentées par chaque point de l'axe sont les valeurs de x :



Les valeurs indiquées (le -3 et le $+1$) sont les valeurs de x pour lesquelles il va se passer quelque chose d'intéressant, celles qui séparent les différents cas. Plus précisément, les valeurs pour lesquels les facteurs étudiés : le $(2x+6)$ et le $(1-x)$, vont s'annuler et donc éventuellement changer de signe. Si un polynôme change de signe (passe du négatif au positif ou du positif au négatif, il passe forcément par la valeur zéro, dans la mesure ou la valeur du polynôme varie « continûment » (sans faire de saut). Cela peut paraître intuitivement évident, mais fait l'objet d'un théorème (le *théorème des valeurs intermédiaires*) dont nous avons déjà dit dans les *Eléments d'Algèbre* (paragraphe *La Racine*) qu'il n'était abordé (et encore, modestement) qu'en terminale. La réciproque est fausse : si un polynôme s'annule, il ne change pas forcément de signe (contre-exemple : x^2).

Comment trouve-t-on les valeurs -3 et $+1$? Bonne question. On pourrait tout simplement résoudre de petites équations : $2x+6 = 0$ et $1-x = 0$. Seulement, nous allons voir qu'on a intérêt à résoudre à la place de petites inéquations, car celles-ci nous donneront plusieurs informations à la fois.

Mais avant, explicitons plus précisément que nous ne l'avons fait au début la signification des « + », des « – » et des « 0 » (zéros) dans les cases du tableau :

x		-3		$+1$	
$2x+6$	$-$	0	$+$	|	$+$

$2x+6$ est négatif lorsque x est avant -3.	$2x+6$ s'annule lorsque x vaut -3.	$2x+6$ est positif lorsque x est entre -3 et $+1$.

Pour savoir comment placer les « + », les « – » et les « 0 », la méthode que nous recommandons vivement consiste à résoudre de « petites inéquations » (des inéquations du premier degré). (Dans le chapitre *Fonctions III*, paragraphe sur les fonctions affines, nous verrons un théorème qui offrira une autre méthode.)
Au premier abord, pour remplir une ligne du tableau, on pourrait se dire qu'il faut résoudre deux inéquations et une équation :

$2x + 6 > 0$	$2x + 6 = 0$	$2x+6 < 0$
$\Leftrightarrow \quad 2x > -6$	$\Leftrightarrow \quad 2x = -6$	$\Leftrightarrow \quad 2x < -6$
$\Leftrightarrow \quad x > -3$	$\Leftrightarrow \quad x = -3$	$\Leftrightarrow \quad x < -3$

La première résolution nous dit que $2x + 6$ est strictement positif lorsque x strictement supérieur à -3. Comme nous l'avons déjà dit, « > 0 » doit être lu « est strictement positif » (et non « est strictement *supérieur à zéro* »), car ainsi entendue, l'affirmation nous dit de placer le signe + dans la deuxième et la troisième colonne. Même principe pour le signe – et pour le zéro. Mais comme la résolution se fait par équivalence, il est inutile de résoudre deux inéquations. En effet, si l'on sait que $2x+6$ est positif (ou nul) si et seulement si x est inférieur à -3, alors on en déduit qu'il est strictement négatif le reste du temps. Par ailleurs, puisque l'équation se résout comme les inéquations (à ceci près qu'on n'a pas à faire attention au sens d'une égalité), on ne s'inflige même pas deux résolutions : on se contente d'une seule. Bref, pour trouver les signes d'un facteur du premier degré et pour trouver par la même occasion la valeur de x qui délimite les

deux cas, on peut se contenter de résoudre au brouillon (sinon, on court le risque d'alourdir la rédaction) une seule inéquation. Par exemple, ici :

$$\begin{aligned} & 2x + 6 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x \geq -6 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq -3 \end{aligned}$$

Le sens choisi pour l'inégalité n'a aucune importance. On aurait pu tout aussi bien résoudre « $2x + 6 \leq 0$ » : l'information récolté eut été exactement la même. Ce sens n'a notamment rien à voir avec celui de l'inéquation de départ. La résolution de l'inégalité « $2x + 6 \geq 0$ » nous raconte que $2x+6$ *est positif* ssi x est supérieur à -3 et donc qu'il est négatif quand x est avant -3.
On placera donc, dans la ligne du tableau consacrée à $2x + 6$, un zéro sous le -3 ; des *plus* après -3 et un *moins* avant. Les « petites inéquations » doivent être traitées avant même de commencer le tableau, car en plus de fournir les signes, elles fournissent les valeurs de x qui délimitent les différents cas et qu'on inscrit dans la toute première ligne, juste au dessus des lignes verticales séparant les différents cas.
Une fois que le même travail a été fourni pour tous les facteurs, nous en sommes là :

x		-3		$+1$	
$2x+6$	$-$	0	$+$	|	$+$
$1-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
$(2x+6)(1-x)$		|		|	

Il reste à présent à remplir la dernière ligne du tableau. On procède alors colonne par colonne, en appliquant la règle des signes de la multiplication des relatifs : + par + donne + ; + par – donne – et enfin : – par – donne +. Cela n'est possible que dans la mesure où l'expression étudiée est un produit. Si c'était une somme, tout ce travail n'aurait aucun sens, car il n'y a pas de « règle des signes », chez les sommes : on ne peut pas toujours déduire le signe d'une somme à partir des signes de ses termes.

x		-3		$+1$	
		0			

$2x+6$	$-$		$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(2x+6)(1-x)$	$-$				

Moins par *plus* donne *moins*, donc, lorsque x est avant -3, $(2x+6)(1-x)$ est *négatif*.

Une fois le tableau terminé, il reste à revenir à l'inéquation et à tirer de la dernière ligne du tableau les renseignements qui nous intéressent :

x		-3		$+1$	
$2x+6$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(2x+6)(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

L'inéquation était : $(2x+6)(1-x)>\mathbf{0}$.

« est positif »

Jusqu'alors le sens de l'inéquation n'était pas intervenu (on a juste étudié son membre de gauche) ; il va être temps d'en tenir compte. On cherche dans quel cas le produit « $(2x+6)(1-x)$ » est strictement positif. Eh bien la dernière ligne du tableau nous le dit : lorsque x est entre -3 et $+1$. Donc l'ensemble des solutions est l'intervalle $\boxed{]-3;+1[}$.

Si l'inégalité avait été large, l'intervalle aurait été fermé : $[-3;+1]$.

Si l'inégalité avait été $(2x+6)(1-x)<\mathbf{0}$, l'ensemble des solutions aurait été la réunion d'intervalles : $]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$.

Cas des quotients

Il arrive que le membre de gauche soit un quotient au lieu d'être un produit. Exemple : $\dfrac{2x+6}{1-x}\geq 0$.

Or la règle des signes du quotient est la même que celle du produit : dans « moins *par* moins donne plus », le « par » peut s'entendre aussi bien comme un « divisé par » que comme un « multiplié par ». Donc le tableau de signes fonctionnera tout aussi bien avec un quotient :

x		-3		$+1$	
$2x+6$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{2x+6}{1-x}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

Seule différence dans le tableau : la *double barre*, qui signifie que l'expression n'est pas définie pour la valeur de x marqué par le trait vertical. Ici, $\dfrac{2x+6}{1-x}$ n'est pas défini lorsque x vaut $+1$. Donc la valeur $+1$ ne pourra en aucun cas appartenir à l'ensemble des solutions : l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2x+6}{1-x}\geq 0$ est l'intervalle semi-ouvert $\boxed{[-3;+1[}$.

Cas des expressions du second degré qui ne se factorisent pas

Comme nous l'avons vu chez les équations, il arrive qu'un polynôme du second degré ne se factorise pas. C'est le cas de « x^2+1 », qu'on est tenté de factoriser par l' « identité remarquable imaginaire » (voir dans les *Eléments d'Algèbre*, le paragraphe sur les identités remarquables.)

Heureusement, lorsqu'on tombe sur un cas de se genre, on peut conclure en remplaçant les calculs par la réflexion.

Ainsi, l'inéquation $x^2+1>0$ est équivalente à $x^2>-1$, qui est une inégalité toujours vraie. En effet, le carré d'un réel étant toujours positif, il est *a fortiori* toujours supérieur à -1. Donc toutes les valeurs de x rendent l'inégalité vraie. Donc tous les nombres sont solution. Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble de tous les réels : $\boxed{\mathbb{R}}$.

Au contraire, l'inéquation $x^2+1<0$ se met sous la forme $x^2<-1$, qui est une inégalité toujours fausse : le carré d'un réel ne pouvant être strictement négatif, il peut encore moins être inférieur à -1. Donc aucune valeur de x ne rend l'inégalité vraie. Donc l'inéquation n'a pas de solution. Donc <u>l'ensemble des solutions est</u> l'ensemble vide : $\boxed{\varnothing}$.

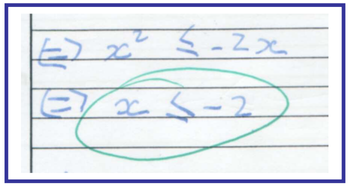
Vérification

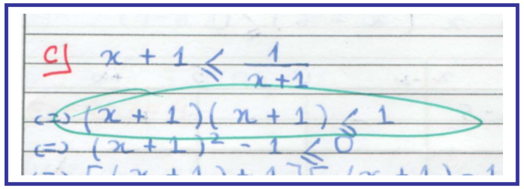
Pour vérifier qu'on n'ait pas commis d'erreur en résolvant une inéquation, on peut remplacer x par les *bornes* des intervalles de l'ensemble des solutions (lorsqu'elles appartiennent à l'ensemble de définition) et regarder s'il y a *égalité*, puis tester ensuite des valeurs entre ces bornes. Dans le cas que nous avons traité, il doit y avoir *égalité* lorsque x vaut -3 ; l'inégalité doit être vraie lorsque x vaut (par exemple) 0 et fausse lorsque x vaut (par exemple) -4 ou $+2$. L'inégalité n'est pas définie lorsque x vaut $+1$.
Le chapitre *Fonction III : sens de variation* nous donnera les moyens de vérifier l'ensemble des solutions à l'aide de la calculatrice graphique.

Les erreurs courantes

Multiplier ou diviser les deux membres par une expression dont le signe varie.

Exemples :





Dans le premier cas, l'élève a divisé les deux membres par x, mais comme x est parfois positif et parfois négatif, on ne sait pas si l'on doit ou non changer le sens de l'inégalité. Il faudrait raisonner par « disjonction de cas » (traiter les deux cas séparément), mais ce serait laborieux. Il est bien plus judicieux de suivre la recommandation donnée au début : <u>**tout faire passer du même côté et factoriser**</u>.

N'écrire un facteur qu'une fois dans le tableau alors qu'il est présent deux fois dans le produit dont on veut étudier le signe.

Exemple : si l'inéquation aboutit a : $(x+5)(x+1)^2 \geq 0$, le tableau suivant est <u>erroné</u> :

x		-5		-1	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+5)(x+1)^2$	$+$	0	$-$	0	$+$

En effet, il faudrait à la place, dresser <u>l'un</u> des deux tableaux suivants :

x		-5		-1	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$(x+5)(x+1)^2$	$-$	0	$+$	0	$+$

x		-5		-1	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+5)(x+1)^2$	$-$	0	$+$	0	$+$

Ne pas tenir compte du facteur x sous prétexte qu'il est déjà écrit à la première ligne du tableau.

Exemple : si l'inéquation aboutit à : $x(x-1)(x+1)\geq 0$, le tableau suivant est erroné :

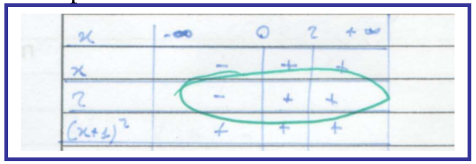
x		-1		$+1$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x(x-1)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

En effet : la toute première ligne ne sert qu'à placer les valeurs qui séparent les différents cas. Il manque la ligne prenant en compte les variations de signe de x :

x		-1		0		$+1$	
$\boldsymbol{x}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x(x-1)(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Faire varier le signe d'une constante.

Exemple :



Une telle erreur révèle que son auteur agit en « **automath** », qu'il ne comprend pas ce qu'il est en train d'écrire. La troisième ligne du tableau prétend en effet qu'il peut arriver que 2 soit négatif.

Ne pas prendre en compte une constante négative.

Exemple : si l'inéquation aboutit à : $-7(1-2x)(x+2)<0$, le tableau suivant est erroné :

x		-2		$+\frac{1}{2}$	
$1\text{-}2x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$-7(1-2x)(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

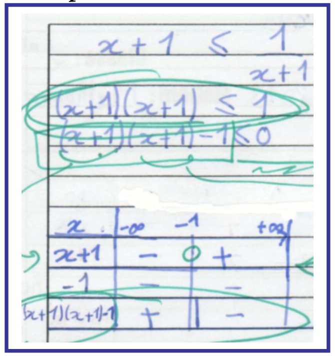
Il faut soit rajouter une ligne pour intégrer le facteur -7…

x		-2		$+\frac{1}{2}$	
$\mathbf{-7}$	$-$		$-$		$-$
$1\text{-}2x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$-7(1-2x)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

…soit transformer l'inéquation : $7(1-2x)(x+2)>0$.

Faire un tableau de signes avec une somme et non avec un produit.

Exemple :



On observe ici un véritable festival d'erreurs. Il y en a trois, qui dans l'ordre sont : multiplication par une expression dont on ignore le signe, tableau de signe avec une somme (au lieu d'un produit) et prise en compte d'un « facteur » une seule fois alors qu'il est présent deux fois.

Ne pas factoriser au maximum le polynôme dont on cherche à étudier le signe.

Exemple : $x^3 < x$

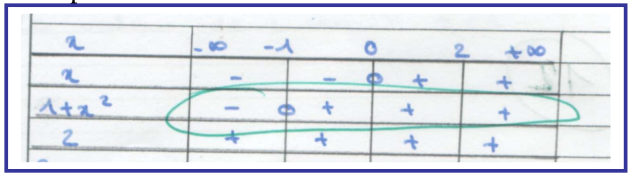
$\Leftrightarrow x^3 - x < 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) < 0$

Si l'on dresse dès à présent le tableau, on va devoir consacrer l'une de ses lignes à l'étude du signe de $x^2 - 1$. Deux possibilités alors : soit on doit faire un « sous tableau », ce qui est laborieux mais exact, soit on commet une erreur, par exemple en traitant par réflexe l'inéquation du second degré comme une équation du premier degré, erreur qui peut survenir dans d'autres contextes.

Traiter un polynôme du second degré comme un polynôme du premier degré.

Exemple :



Contraire de l'erreur précédente : dégainer un tableau pour une équation du premier degré.

Exemple : $1 - x > 0$

$\Leftrightarrow -1(x-1) > 0$

x		$+1$	
-1	$-$		$-$
$x-1$	$-$	0	$+$
$-1(x-1)$	$+$	0	$-$

Pas faux, certes, mais inutilement compliqué.

V- Opérations membres à membres

Théorème

> On peut toujours additionner membre à membre deux inégalités (de même sens) :
>
> $$\forall a,b\in\mathbb{R}\ ;\quad \begin{cases} a<b \\ a'<b' \end{cases} \Rightarrow\ a+a'<b+b'$$

Démonstration

$$\begin{cases} a<b \\ a'<b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\boldsymbol{a'}<b+\boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b}+a'<\boldsymbol{b}+b' \end{cases}$$

En appliquant la première règle élémentaire de transformation des inégalités.

$\Rightarrow\ a+a'<b+b'$ Par transitivité.

Remarques

- Si l'une des inégalités de départ est large et l'autre stricte, alors on obtient encore à l'arrivée une inégalité stricte :

$$\begin{cases} a<b \\ a'\le b' \end{cases} \Rightarrow\ a+a'<b+b'$$

- Mais si les deux inégalités de départ sont larges, on obtient une inégalité large.
- Ce théorème présente une implication et non une équivalence.

On ne peut pas soustraire membre à membre deux inégalités.

Contre exemple :

$$\begin{array}{rll} & 3<5 & \text{vrai} \\ - & 1<4 & \text{vrai} \\ \hline & 2<1 & \textbf{faux} \end{array}$$

Théorème

> On peut toujours multiplier membre à membre deux inégalités (de même sens) à condition que les membres de ces inégalités soient tous positifs :
>
> $$\forall a,b\in\mathbb{R}\ ;\quad \begin{cases} 0\le a<b \\ 0\le a'<b' \end{cases} \Rightarrow\ aa'<bb'$$

Démonstration

$$\begin{cases} a<b \\ a'<b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\boldsymbol{a'}<b\boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b}a'<\boldsymbol{b}b' \end{cases}$$

Car $a'>0$ et $b>0$

$\Rightarrow\ aa'<bb'$ Par transitivité.

VI- Glossaire

corollaire — Un corollaire est une conséquence directe, en général d'un théorème. Le mot *corollarium* signifie en latin « petite couronne », qui est donnée comme une gratification.

celle-ci / celles-là — En principe, *celui-ci* désigne l'élément le plus rapproché ou celui qui va suivre et *celui-là* l'élément le plus éloigné ou celui qui précède.

intrinsèque — Qui appartient en propre à l'objet considéré, à son essence. S'oppose à *extrinsèque* (plus rare).
"Ce fétiche n'a aucune valeur intrinsèque et ne peut avoir tenté qu'un collectionneur" *L'oreille cassée*. (*Tintin*)

induire — En logique, trouver par induction, c'est-à-dire par généralisation, en remontant des faits à la loi. S'oppose à *déduire*.

« automath » — Néologisme formé par Stella Baruk pour désigner l'élève qui se met à agir comme un automate en mathématiques, qui perd le sens de ce qu'il fait. Pour Stella Baruk ce phénomène n'est pas tant la faute de l'élève que celle d'une pédagogie qui ne serait pas assez centrée sur « la langue et le sens ».